Title	Jordan 領域ノ Stabilité トCapacité, (III)
Author(s)	井上, 正雄
Citation	全国紙上数学談話会. 165 p.442-p.450
Issue Date	1939-09-17
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74654
rights	
Note	

725. Jordan領域ノstabilitéトCapacité,(III)

井上　正雄（阪大）

Capacitéハ勿論Frostman, de la Vallée Poussinノ意味ニトル。

Jordan領域$\mathfrak{D}$ノ境界点pヨリノ距離ガλ^{n+1}, λ^nノ間ニアリ且ツ$\overline{\mathfrak{D}}$ニ含マレザル点集合（閉）ノcapacitéヲγ_nトスルトキ次ノ定理ガ成立スル。(1)

定理7.

pガstableナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{\lambda^n}$$

ガ発散スルコトデアル。

（注）充分條件トシテハ，アルーツノλニツイテ発散スレバヨイシ，必要條件トシテハ、スベテノλニツイテ成立スル。Keldych, Laurentieffハ$\lambda=\frac{1}{2}$ノ場合ヲC.R.(loc. cit)ニ証明ナシニ述ベテイル。

（証）先ツ$0<\lambda<1$ナルアルーツノλニ對シテ$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{\lambda^n}=+\infty$トシヤウ。$p$ヨリノ距離ガ$\lambda^{\frac{n+1}{2}}$, $\lambda^{\frac{n}{2}}$ノ間

---

(1) 証明ハO.D. Kellogg. Fondation of Potential theory, P.331–P.334ニアル方法ヲ用ヒタ。従ツテアマリ感心シタ証明デハナイヤウデアル。

ニアリ且ツ $\overline{\mathcal{D}}$ ニ含マレザル点集合ヲ $e(\lambda^{\frac{n+1}{2}}, \lambda^{\frac{n}{2}})$ デ表ハスコトニシ, $\sigma_n = C(e(\lambda^{\frac{n+1}{2}}, \lambda^{\frac{n}{2}}))$ トスルトキ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\lambda^{\frac{n}{2}}} = \infty$$ トナルコトヲ先ヅ証明シマス。

$e(\lambda^{n+1}, \lambda^n)$ ニ含マレル régulier 且ツ $\lim_{i\to\infty} e_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)$ トナル領域列 $\{e_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)\}$ ヲ考フレバ

$$C(\overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n))$$

$$\leqq C(\overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)\cdot \overline{C_{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}}) + C(\overline{\overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n) - \overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)\cdot C_{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}})$$

各境界点デ定理1ノ條件ヲ満足スル如ク $e_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)$ ヲ撰ンデオケバ定理2及ビ領域ノ境界点ガ全部 stable ナラバ領域モ stable トナルコトヨリ。

$$\overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)\cdot \overline{C_{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}}, \quad \overline{\overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n) - \overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)\cdot e_{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}}$$

ニ含マレ且ツ之レニ近似スル régulier ナ領域列

$\{\Delta_j^{(1)}\}, \{\Delta_j^{(2)}\}$ ヲ夫々撰ビ,

$$\lim_{j\to\infty} C(\overline{\Delta_j^{(1)}}) = C(\overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)\cdot \overline{C_{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}})$$

$$\lim_{j\to\infty} C(\overline{\Delta_j^{(2)}}) = C(\overline{\overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n) - \overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)\cdot C_{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}})$$

ナラシメ得ル。故ニ $\varepsilon_n > 0$ ヲ與ヘタトキ, j ヲ適當ニ撰ビ

$$C(\overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)) - \varepsilon_n \leqq C(\overline{\Delta_j^{(1)}}) + C(\overline{\Delta_j^{(2)}})$$

ナラシメ得ル。

$$\therefore \quad C(\overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)) - \varepsilon_n$$

$$\leqq C\left(e\left(\lambda^{\frac{2n+2}{2}}, \lambda^{\frac{2n+1}{2}}\right)\right)+C\left(e\left(\lambda^{\frac{2n+1}{2}}, \lambda^{\frac{2n}{2}}\right)\right).$$

即チ　$\gamma_n - \varepsilon_n \leqq \sigma_{2n+1} + \sigma_{2n}$

$$\therefore \quad \frac{\gamma_n - \varepsilon_n}{\lambda^n} \leqq \frac{\sigma_{2n+1}}{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}} + \frac{\sigma_{2n}}{\lambda^{\frac{2n}{2}}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{\lambda^n} < \infty$ ナル如ク最初ニ $\{\varepsilon_n\}$ ヲ撰ブコトガ出来ルカラ，結局

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\lambda^{\frac{n}{2}}} = \infty$$

ヲ得ル。

依ッテ $1 > \varepsilon > 0$ ヲ任意ニ與ヘタトキ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda^n} = \infty$ 且 $1 > \lambda > 1 - \varepsilon$ ナル如ク λ ヲ撰ブコトガ出來ル。更ニ K ヲ $\lambda^{K-1} < \varepsilon$ ナル如ク撰ブ。シカルトキ

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_{Ki}}{\lambda^{Ki}}, \ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_{Ki+1}}{\lambda^{Ki+1}}, \ \cdots\cdots, \ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_{K(i+1)-1}}{\lambda^{K(i+1)-1}}$$

ノウチ何レカ少クトモ一ツノ級數ガ發散シナケレバナラヌ。故ニ $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_{Ki}}{\lambda^{Ki}}$ ガ發散スルモノトシヨウ。（他ノ級數ニツイテモ同様）。

次ニ任意ニ $\rho > 0$ ヲトリ $\lambda^{Km} < \rho$ ナル如ク m ヲ定メル。$e_j(\lambda^{n+1}, \lambda^n)$ ヲ夫々ノ n ニ対シテ適當ニトリ，$\gamma_n^* = C(\overline{e}_j(\lambda^{n+1}, \lambda^n))$ トスルトキ $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_{Ki}^*}{\lambda^{Ki}} = \infty$ ナ

ラシメ得ル。

サテ次ニ一般ニ $e_j(\lambda^{n+1}, \lambda^n)$ ノ potentiel conducteur ヲ v_n トシ

$$\nabla_{m,m'} = \sum_{i=m}^{m'} v_{\kappa i} \quad (m' \geqq m \text{ ニシテ } m' \text{ ハ後ニ定ム})$$

トスレバ，コノ函数ハ $C_{m,m'} = \sum_{i=m}^{m'} \overline{e}_j(\lambda^{\kappa i+1}, \lambda^{\kappa i})$ ノ点ヲ除イテ調和且ツコノ境界ヲコメテ連続トナル。

更ニ $\overline{e}_j(\lambda^{\kappa n+1}, \lambda^{\kappa n})$ ノ境界上デハ，$v_{\kappa n} = 1$，且ツ $i \neq n$ ナラバ

$$v_{\kappa i} \leqq \frac{1}{\lambda(1-\lambda^{\kappa-1})} \cdot \frac{r^*_{\kappa i}}{\lambda^{\kappa i}}$$

トナル。(2)

故ニ $e_{m,m'}$ ノ境界上デハ

$$\nabla_{m,m'} \leqq 1 + \frac{1}{\lambda(1-\lambda^{\kappa-1})} \sum_{i=m}^{m'} \frac{r^*_{\kappa i}}{\lambda^{\kappa i}} < \frac{1 + \sum_{i=m}^{m'} \frac{r^*_{\kappa i}}{\lambda^{\kappa i}}}{\lambda(1-\lambda^{\kappa-1})}$$

$$\nabla'_{m,m'} = \frac{\lambda(1-\lambda^{\kappa-1})\nabla_{m,m'}}{1 + \sum_{i=m}^{m'} \frac{r^*_{\kappa i}}{\lambda^{\kappa i}}}$$

トオケバコノ調和函数ハ $e_{m,m'}$ ノ境界上デ常ニ $\leqq 1$ デアル。

---

(2) 一般ニ閉集合 F ノ potentiel conducteur ヲ ∇ トスルトキ $\dfrac{C(F)}{\underset{z \in F}{\mathrm{o.g.d}}(p,z)} \leqq \nabla(p) \leqq \dfrac{C(F)}{\underset{z \in F}{\mathrm{n.G.d}}(p,z)}$ が成立スル。

(O.D. Kellogg. loc. cit p. 331)

次ニ $\{\mathfrak{D}^2_{n,\rho}\}$ (3) ヲ考ヘ n ヲ充分大キクトレバ $\overline{C_\rho}$ 内ノ $\mathfrak{D}^2_{n,\rho}$ ニ含マレナイ閉集合 $\mathfrak{D}^{2*}_{n,\rho}$ ガ $e_{m,m'}$ ヲ含ムヤウニスルコトガ出來ル。コノ閉集合 $\mathfrak{D}^{2*}_{n,\rho}$ ノ potentiel conducteur ヲ $V_{n,\rho}$ トスレバ

$$V_{n,\rho} \geqq V_{m,m'}$$

次ニ p ヲ中心トシタ半徑 r 内ノ $\mathfrak{D}$ ノ點ニ對シテハ(但シ $r < \lambda^{km+1}$)

$$V_{m,m'} \geqq \sum_{i=m}^{m'} \frac{r^*_{ki}}{r+\lambda^{ki}} \quad (2)$$

從ッテ

$$V_{n,\rho} > \lambda(1-\lambda^{k-1}) \frac{\sum_m^{m'} \frac{r^*_{ki}}{r+\lambda^{ki}}}{1+\sum_m^{m'} \frac{r^*_{ki}}{\lambda^{ki}}}$$

トナル。

$$\sum_m^{m'} \frac{r^*_{ki}}{\lambda^{ki}} = D(m',m) \text{ トスレバ}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sum_m^{m'} \frac{r^*_{ki}}{r+\lambda^{ki}}}{1+\sum_m^{m'} \frac{r^*_{ki}}{\lambda^{ki}}} = \frac{D(m',m)}{1+D(m',m)} .$$

$\lim_{m'\to\infty} D(m',m) = \infty$ ナル故, m' ヲ充分大キクトッテオキ(例ヘバ $\frac{D(m',m)}{1+D(m',m)} > 1-\varepsilon$ ナル如ク), 次ニ r ヲ充分小サクトレバ

---

(3) $\mathfrak{D}^2_{n,\rho} = \mathfrak{D}^2_n \cdot C_\rho$

カクテ

$$\frac{\displaystyle\sum_{m}^{m'} \frac{r_{\kappa i}^{*}}{r+\lambda^{\kappa i}}}{1+\displaystyle\sum_{m}^{m'} \frac{r_{\kappa i}^{*}}{\lambda^{\kappa i}}} > 1-\varepsilon$$

ナラシメ得ル。

依ッテ　$\nabla_{n,\rho} > (1-\varepsilon)^3$

$\therefore\quad \nabla_{\rho} \geqq (1-\varepsilon)^3$　　（但シ $|z-p|<r(\varepsilon)$ ナルzニ対シテ）。

ε ハ任意デアッタカラ，結局

$$\lim_{z\to p} \nabla_{\rho}(z)=1$$

故ニ，系（前号，p. 391）ニヨリ，p ハ stable ナ境界点デアル。

次ニ必要ナルコトヲ証明スル代リニ，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n}{\lambda^n}$ が收斂スレバ p ハ stable デナイコトヲ証明シヤウ。

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n}{\lambda^n}$ が收斂スレバ，任意ノ λ（$0<\lambda<1$）ニ対シテ，m ヲ充分大キクトレバ $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty}\frac{r_n}{\lambda^n} < \frac{\lambda}{4}$ ナラシメ得ル。サテ若シ p が stable ナラバ系ニオイテ $\rho=\lambda^m$ ト考ヘテ得ラレル極限函数ヲ $\nabla_m(z)$ トスレバ

$$\lim_{z\to p} \nabla_m(z)=1.$$

故ニ p ヲ中心トシテ一ツノ球 $C_{\rho}(m)$ ヲ画キ $\mathfrak{D}$ ニ属スルコノ球面 $S(C_{\rho(m)})$ 上デ $\nabla_m(z)>\frac{3}{4}$ ナラシメ得ル。又一方 $m'>m$ ナル m' ヲ適当ニ大キクトリ，$S(C_{\rho(m)})$ 上

デハ $\nabla_{m'+1}^{(2)} < \frac{1}{4}$ ナラシメ得ル（コレハ m' ヲ充分大キクトレバヨイ —— $\nabla_{m'+1}^{(2)}$ ハ系ニオイテ $\rho=\lambda^{m'+1}$ トシテ得ラレル極限函数）。

サテ $\overline{e_i}(\lambda^{n+1},\lambda^n)$ ノ potentiel conducteur ヲ $v_{n,i}$ トシ

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{n=m}^{m'} v_{n,i}=\nabla_{m,m'}\text{ トスレバ}$$

$$\nabla_m \leqq \nabla_{m'}+\nabla_{m,m'}.$$

コレハ次ノ如クニシテ証明サレル。

$\nabla_m=\lim\limits_{i\to\infty}\nabla_{m,i}$; $\nabla_{m,i}$ ハ $\overline{\mathcal{D}^{2*}_{i,\lambda^m}}$ ノ potentiel conducteur; $\mathcal{D}^2_n$ ニ充分ノ régularité（各境界点デ定理1ノ條件ヲ満足スル如キ）ヲ與ヘテオイタモノトシ，$\{\nabla_{m'+1,i,j}\}$，$\{v_{n,i,j}\}$ $(n=m,\cdots\cdots,m')$ ヲトモニ $\mathcal{D}^{2*}_{i,\lambda^{m'+1}}$，$\{e_i(\lambda^{n+1},\lambda^n)\}$ 内ニ夫々トッタ régulier 領域ノ potentiel conducteur ニシテ，$\lim\limits_{j\to\infty}\nabla_{m'+1,i,j}$ $=\nabla_{m'+1,i}$，$\lim\limits_{i\to\infty}\nabla_{m'+1,i}=\nabla_{m'+1}$；$\sum\limits_{n=m}^{m'}\lim\limits_{j\to\infty}v_{n,i,j}=$ $\nabla_{m,m',i}$，$\lim\limits_{i\to\infty}\nabla_{m,m',i}=\nabla_{m,m'}$ ナル如ク取ルコトが出来ル。

$$\text{シカラバ}\quad \nabla_{m,i}\leqq\lim_{j\to\infty}\nabla_{m',i,j}+\sum_{n=m}^{m'}\lim_{j\to\infty}v_{n,i,j},$$

従ッテ

$$\nabla_m\leqq\nabla_{m'}+\nabla_{m,m'}。$$

故ニ $S(C_{\rho(m)})$ 上デハ

$$\frac{3}{4} \leqq \frac{1}{4} + \nabla_{m,m'}$$

$$\therefore \quad \nabla_{m,m'} \geqq \frac{1}{2} .$$

サテ $\rho(m) \neq \lambda^i$ $(i = 1, 2, \text{-----})$ ナル如ク最初ニ撰ンデオケバ，$e_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)$ ノ境界上デハ 1，$\nabla_{m,m'} \geqq \frac{1}{2}$ ナル $S(C_{\rho(m)})$ 上デハ $\frac{1}{2}$，$S(C_{\rho(m)})$ 上ノ他ノ点デハ 0 ナル値ヲトル $C_{\rho(m)}$ 内デノ調和函数ヲ Φ_i トスレバ p ノ極ク小サイ近傍デハ

$$\nabla_{m,m'} \geqq \lim_{i \to \infty} \Phi_i \geqq \frac{1}{2} ,$$

従ッテ $\nabla_{m,m'} \geqq \frac{1}{2}$ トナル（ヨッテ勿論 $\nabla_{m,m'}(p) \geqq \frac{1}{2}$）。

何故ナラバ，Φ_i ガ境界上デ 0 ナル点集合ノ測度ハ $i \longrightarrow \infty$ トトモニ $\longrightarrow 0$ トナリ，定理 3 ノ証明ノトキト同様ニシテ $\Phi_i \geqq \frac{1}{2}$ ヲ導クコトガ出来ルカラデアル。

シカルニ $\nabla_{m,m'}$ ノ p ニ於ケル値ハ

$$\nabla_{m,m'}(p) = \lim_{i \to \infty} \sum_{m}^{m'} v_{n,i}(p) \leqq \sum_{n=m}^{m'} \frac{r_n}{\lambda^{n+1}} {}^{(2)}$$

$$\leqq \frac{1}{\lambda} \sum_{m}^{m'} \frac{r_n}{\lambda^n}$$

$$< \frac{1}{4}$$

トナッテ矛盾トナル。故ニ p ハ stable デナイ。

即チ p ガ stable ナラバ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{\lambda^n} = \infty$ デアル。 C.Q.F.D.

Keldych, Laurentieff ノ point de stabilité ノ定義バイカナルF＝対シテモ, $\lim_{z\to p} H^{(1)}(z, F, \vartheta) = \lim_{z\to p} H^{(2)}(z, F, \vartheta)$ ナルトキpヲ point de stabilité ト呼ブ″ト云フノデアルガ, 以上デ談話(Ⅰ)＝於ケル stable ノ定義モ本質的＝ハ何等ノ変リノナイコトガ分ッタ。勿論 stable ト云フ言葉ノ意味ヲ理解スル＝ハ K.L ノ定義ノ方ガ良イダラウ。以上デ大体ノ話ヲ一先ヅ打切ラウ。

最後＝〝régulier デアッテ stable デナイ境界点ノ存在″或ハ〝stable デナイ Jordan 領域ノ存在″ノ証明ガ未発表デアルコトヲ附加シテオカウ。

〔前号ノ訂正〕

tribial ナ誤リヲ除イテハ, p.385＝於ケル計算中 $+4\pi U_n(0)$ トアルノハ皆 $-4\pi U_n(0)$ ノ誤リデアル。